

Integrais Impróprios

2009/10

Na definição de integral de Riemann de uma função f num intervalo I , exige-se que o intervalo seja **fechado**, **limitado** e que f seja **limitada** nesse intervalo. Vamos estudar generalizações da noção de integral quando não se verifica alguma destas condições.

Se f for uma função integrável no intervalo $[a, x] \forall x > a$ e se o integral indefinido

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

tem limite finito quando $x \rightarrow +\infty$, poderemos escrever

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt.$$

Suponhamos que, sendo $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, a função f é integrável em qualquer intervalo $[a, x]$ com $x \in]a, b[$. Nestas condições, se a função f for limitada em $[a, b]$, será integrável em $[a, b]$ e tem-se

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt,$$

devido à continuidade do integral indefinido.

Definição

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e f uma função definida no intervalo $[a, +\infty[$. Suponhamos que f é integrável em qualquer intervalo $[a, x]$ com $x > a$. Seja, para cada $x > a$,

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Definição

Chama-se **integral impróprio de 1ª espécie** de f em $[a, +\infty[$ a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$$

e designa-se por

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt.$$

a) Se $F(x)$ tem limite finito quando $x \rightarrow +\infty$, diz-se que f é integrável (em sentido impróprio) no intervalo $[a, +\infty[$ ou que o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ existe, tem sentido ou é **convergente**.

b) Se $F(x)$ não tem limite ou tem limite infinito quando $x \rightarrow +\infty$, diz-se que f não é integrável no intervalo $[a, +\infty[$ ou que o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ não existe ou é **divergente**.

Teorema

Se f e g são tais que os integrais $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ e $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ são convergentes e se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então o integral

$\int_a^{+\infty} (\alpha f + \beta g)(t) dt$ é convergente e

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f + \beta g)(t) dt = \alpha \int_a^{+\infty} f(t) dt + \beta \int_a^{+\infty} g(t) dt.$$

Teorema

Se o integral $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ é convergente e se $b > a$ então o integral $\int_b^{+\infty} f(t) dt$ é convergente e

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^{+\infty} f(t) dt.$$

Teorema

Sejam $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ e $\int_b^{+\infty} g(x) dx$ dois integrais impróprios de 1ª espécie com funções integrandas não negativas e suponhamos que existem $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) \leq d g(x)$, $\forall x > c$.

- Se $\int_b^{+\infty} g(x) dx$ é convergente então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é convergente.
- Se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é divergente então $\int_b^{+\infty} g(x) dx$ é divergente.

Teorema

Sejam $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ e $\int_b^{+\infty} g(x) dx$ dois integrais impróprios de 1ª espécie com funções integrandas positivas. Se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \quad (k \neq 0).$$

Então os integrais são da mesma natureza, isto é, são ambos convergentes ou ambos divergentes.

Teorema

Sejam $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ e $\int_b^{+\infty} g(x) dx$ dois integrais impróprios de 1ª espécie com funções integrandas positivas. Se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

então

- se $\int_b^{+\infty} g(x) dx$ é convergente, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é convergente.
- se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é divergente, $\int_b^{+\infty} g(x) dx$ é divergente.

Teorema

Sejam $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ e $\int_b^{+\infty} g(x) dx$ dois integrais impróprios de 1ª espécie com funções integrandas positivas. Se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty,$$

então

- se $\int_b^{+\infty} g(x) dx$ é divergente, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é divergente.
- se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é convergente, $\int_b^{+\infty} g(x) dx$ é convergente.

Teorema

Se o integral $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ é convergente então o integral

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é convergente e verifica-se a desigualdade:

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx.$$

Definição

Diz-se que o integral $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é **absolutamente convergente** se o integral $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ é convergente. Diz-se que o integral $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é **simplesmente convergente** se for convergente e $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ divergente.

$$\int_{-\infty}^a f(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t) dt$$

A estes integrais também se dá o nome de **integrais impróprios de 1ª espécie**.

Nota:

$$\int_{-\infty}^a f(t) dt = \int_{-a}^{+\infty} f(-t) dt$$

Definição

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em qualquer intervalo limitado. Diz-se que o integral de f em $\mathbb{R}$ é **convergente** se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que os dois integrais $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ e $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ são convergentes.

Em caso de convergência,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = \int_{-\infty}^a f(x) \, dx + \int_a^{+\infty} f(x) \, dx$$

com $a \in \mathbb{R}$ arbitrário. A este integral também se chama **integral impróprio de 1ª espécie**.

Estudemos o integral impróprio de 1ª espécie

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx, \text{ sendo } a > 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{1}{t^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha \leq 1 \\ -\frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Então o integral converge se, e só se, $\alpha > 1$.

Estudemos o integral impróprio de 1ª espécie

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx, \text{ sendo } a > 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{1}{t^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha \leq 1 \\ -\frac{a^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Então o integral converge se, e só se, $\alpha > 1$.

Definição

Se f é integrável em qualquer intervalo $[a, b - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, mas não é integrável em $[a, b]$, podemos definir a função, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, para $x \in [a, b[$ e calcular,

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt.$$

Ao integral $\int_a^b f(x) dx$ chama-se **integral impróprio de 2ª espécie**.

Tal como no caso dos integrais impróprios de 1ª espécie, é útil conhecer a natureza de alguns integrais:

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx, \quad \alpha > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x \frac{1}{(b-t)^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Então o integral converge se, e só se, $\alpha < 1$.

Tal como no caso dos integrais impróprios de 1ª espécie, é útil conhecer a natureza de alguns integrais:

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx, \quad \alpha > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x \frac{1}{(b-t)^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Então o integral converge se, e só se, $\alpha < 1$.

Definição

Se a função f é integrável em qualquer intervalo $[a + \varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$, mas não é integrável em $[a, b]$, podemos definir a função,

$$F(x) = \int_x^b f(t) dt, x \in]a, b] \text{ e calcular}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt.$$

Ao integral $\int_a^b f(x) dx$ chama-se **integral impróprio de 2ª espécie**.

Vamos estudar o integral $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$, $\alpha > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Então o integral converge se, e só se, $\alpha < 1$.

Vamos estudar o integral $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$, $\alpha > 0$.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dx = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \frac{(b-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}, & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

Então o integral converge se, e só se, $\alpha < 1$.

Definição

Suponhamos que a função f é integrável em qualquer intervalo $[a + \varepsilon_1, b - \varepsilon_2]$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, mas não é integrável em $[a, b - \varepsilon_2]$ nem em $[a + \varepsilon_1, b]$. Define-se

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx, \quad a < c < b.$$

Este integral é também um **integral impróprio de 2ª espécie**.

Nota: O integral do primeiro membro é convergente se, e só se, os dois integrais do segundo membro forem convergentes. Se algum dos integrais do segundo membro for divergente, então o integral em estudo é divergente.

Definição

Se c é um ponto interior do intervalo $[a, b]$ e f é uma função integrável em qualquer intervalo $[a, c - \varepsilon_1]$, $\varepsilon_1 > 0$, e $[c + \varepsilon_2, b]$, $\varepsilon_2 > 0$, mas não é integrável em $[a, b]$, define-se o **integral impróprio de 2ª espécie**

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx, \quad a < c < b.$$

Nota: O integral do primeiro membro é convergente se, e só se, os dois integrais do segundo membro forem convergentes. Se algum dos integrais do segundo membro for divergente, então o integral do primeiro membro é divergente.

Para os integrais impróprios de 2ª espécie, os critérios de convergência são idênticos aos obtidos para os integrais impróprios de 1ª espécie.

Teorema

O integral impróprio de 2ª espécie no limite superior (inferior, respectivamente) $\int_a^b f(t) dt$, com $b > a$ e $f(t) \geq 0, \forall t \in]a, b[$, é convergente se, e só se, existe uma constante M tal que

$$\int_a^x f(t) dt \leq M, \quad \forall a \leq x < b$$

$$\left(\int_x^b f(t) dt \leq M, \quad \forall a < x \leq b, \text{ respectivamente} \right).$$

Teorema

Sejam $\int_a^b f(x) dx$ e $\int_a^b g(x) dx$ dois integrais impróprios de 2ª espécie (no mesmo limite de integração) com funções integrandas não negativas e suponhamos que $f(x) \leq g(x) \forall a \leq x < b$ (ou, $\forall a < x \leq b$).

- Se $\int_a^b g(x) dx$ é convergente então $\int_a^b f(x) dx$ é convergente.
- Se $\int_a^b f(x) dx$ é divergente então $\int_a^b g(x) dx$ é divergente.

Teorema

Sejam $\int_a^b f(x) dx$ e $\int_a^b g(x) dx$ dois integrais impróprios de 2ª espécie (no mesmo limite de integração) com funções integrandas positivas e suponhamos que o limite

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k, k \neq 0 \quad \left(\text{ou, } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k, k \neq 0 \right)$$

Então os integrais são da mesma natureza, isto é, são ambos convergentes ou ambos divergentes.

Teorema

Sejam $\int_a^b f(x) dx$ e $\int_a^b g(x) dx$ dois integrais impróprios de 2ª espécie (no mesmo limite de integração) com funções integrandas positivas. Se

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \left(\text{ou, } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \right)$$

então

- se $\int_a^b g(x) dx$ é convergente $\int_a^b f(x) dx$ é convergente.
- se $\int_a^b f(x) dx$ é divergente $\int_a^b g(x) dx$ é divergente.

Teorema

Sejam $\int_a^b f(x) dx$ e $\int_a^b g(x) dx$ dois integrais impróprios de 2ª espécie (no mesmo limite de integração) com funções integrandas positivas. Se

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \quad \left(\text{ou, } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \right)$$

então

- se $\int_a^b g(x) dx$ é divergente então $\int_a^b f(x) dx$ é divergente.
- se $\int_a^b f(x) dx$ é convergente então $\int_a^b g(x) dx$ é convergente.

Teorema

Seja $\int_a^b f(x) dx$ um integral impróprio de 2ª espécie. Se o integral $\int_a^b |f(x)| dx$ é convergente o integral $\int_a^b f(x) dx$ também é convergente.

Definição

Diz-se que o integral impróprio de 2ª espécie $\int_a^b f(x) dx$ é

absolutamente convergente se o integral $\int_a^b |f(x)| dx$ é

convergente. Se o integral $\int_a^b f(x) dx$ é convergente e

$\int_a^b |f(x)| dx$ é divergente, diz-se que o integral $\int_a^b f(x) dx$ é **simplesmente convergente**.

Podem ainda considerar-se **integrais impróprios mistos**: por exemplo, com algum limite de integração infinito e em que a função integranda se torne ilimitada num número finito de pontos do intervalo de integração.

Neste caso, a definição do integral faz-se dividindo o intervalo de integração por forma que se obtenham integrais dos tipos anteriores;

se os integrais assim obtidos são convergentes diz-se que o integral misto é convergente e o seu valor é igual à soma dos valores dos integrais correspondentes aos subintervalos. Se algum dos integrais obtidos é divergente o integral misto é divergente.

Podem ainda considerar-se **integrais impróprios mistos**: por exemplo, com algum limite de integração infinito e em que a função integranda se torne ilimitada num número finito de pontos do intervalo de integração.

Neste caso, a definição do integral faz-se dividindo o intervalo de integração por forma que se obtenham integrais dos tipos anteriores;

se os integrais assim obtidos são convergentes diz-se que o integral misto é convergente e o seu valor é igual à soma dos valores dos integrais correspondentes aos subintervalos. Se algum dos integrais obtidos é divergente o integral misto é divergente.

Exemplos de aplicação dos integrais impróprios ao cálculo de áreas de domínios planos ilimitados.

1) Calculemos a área do domínio determinado pela imagem da função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e o eixo dos xx :

2) Calculemos a área do domínio determinado pela imagem da função $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$, as rectas $x = -3$ e $x = 2$ e o eixo dos xx :